Le problème de la table qui bascule

Problème

M. Rainville est assis autour d'une table et est positionné de sorte à être entre deux pattes de la table (figue 1). Il s'agit d'une table ronde dont les pattes sont disposées de façon symétrique, comme on retrouve normalement. M. Rainville tente alors de faire basculer la table vers lui en posant simplement ses mains sur celles-ci et en y appliquant une force.

Quelle est la force minimale qu'il doit appliquer sur la table pour qu'il puisse la faire basculer ? Dans quelle direction doit être cette force ?

Posez vous-même les paramètres importants à considérer pour résoudre ce problème.

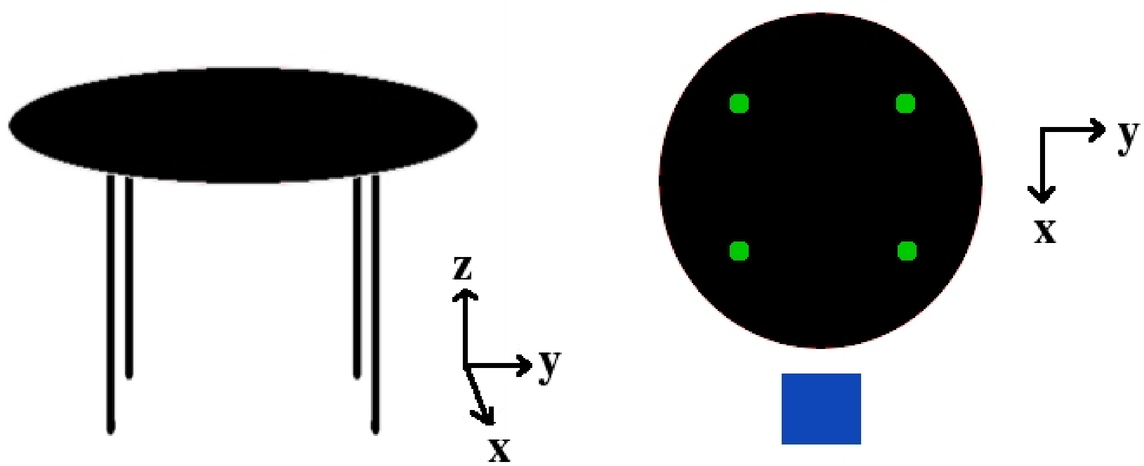

FIGURE 1 – Table utilisée par M. Rainville. À gauche, on voit la table selon la perspective de M. Rainville et à droite, on voit la table du dessus. Les points verts indiquent la position des pattes de la table et le carré bleu la position de M. Rainville.

Solution

Nous avons affaire à un problème statique. En effet, le basculement de la table se faisant sur les pattes qui sont près de M. Rainville, la force minimale qu'il doit appliquer correspondra à celle nécessaire pour que la force normale sur les deux pattes opposées à M. Rainville devienne nulle. Ceci simplifie le problème.

Ainsi, puisque le problème est de nature statique, nous aurons que la force totale ainsi que le couple total seront nuls lorsque la force nécessaire pour basculer la table est minimale. Les forces impliquées dans ce problème sont :

$\mathbf{F_A}$: la force appliquée par M. Rainville, au point d'appui situé à la position $\mathbf{R_A}$
$\mathbf{F_G}$: la force gravitationnelle exercée sur la table, à son centre de masse $\mathbf{R_{CM}}$
$\mathbf{F_{N,i}}$: la force normale exercée par le plancher sur la patte i située au point $\mathbf{r_i}$
$\mathbf{F_{f,i}}$: la force de friction exercée par le plancher sur la patte i située au point $\mathbf{r_i}$

Aucune force n'est exercée sur la table dans la direction de l'axe des y et le problème est symétrique selon ce même axe par rapport au centre de la table. Nous pouvons alors résoudre le problème seulement dans le plan défini par les axes des x et des z (voir figure 1). Pour visualiser la situation, la contribution des différentes forces est indiquée à la figure 2. J'ai combiné sur ce graphique les forces normales et les forces de friction exercées sur les deux pattes près de M. Rainville, en les représentant par $\mathbf{F_N}$ et $\mathbf{F_f}$ respectivement. Ainsi, si les pattes près de M. Rainville sont indiquées par indices 1 et 2, alors $\mathbf{F_N} = \mathbf{F_{N,1}} + \mathbf{F_{N,2}}$ et $\mathbf{F_f} = \mathbf{F_{f,1}} + \mathbf{F_{f,2}}$.

Le choix de l'origine a été fait pour simplifier le calcul du couple. Ainsi, puisque le couple total $\mathbf{N_{tot}}$ et la force totale $\mathbf{F_{tot}}$ doivent être nuls, en considérant la normale sur les pattes à l'opposé de M. Rainville comme étant nulle, nous avons que

$$\mathbf{F_{tot}} = \mathbf{F_A} + \mathbf{F_G} + \mathbf{F_N} + \mathbf{F_f} = 0 \tag{1}$$

et

$$\mathbf{N_{tot}} = \mathbf{R_A} \wedge \mathbf{F_A} + \mathbf{R_{CM}} \wedge \mathbf{F_G} = 0 \tag{2}$$

L'opérateur $\wedge$ désigne le produit vectoriel. Si la table ne bouge pas, la force de friction et la force normale s'ajusteront pour compenser la somme des autres forces. Il s'agit des contraintes du problème. Nous pourrions utiliser cette équation afin de déterminer si la table glisse sur le sol ou sur les mains en fonction des coefficients de friction. Cependant, ceci ne nous informe pas de la force $\mathbf{F_A}$ que l'on doit appliquer sur la table. Pour obtenir

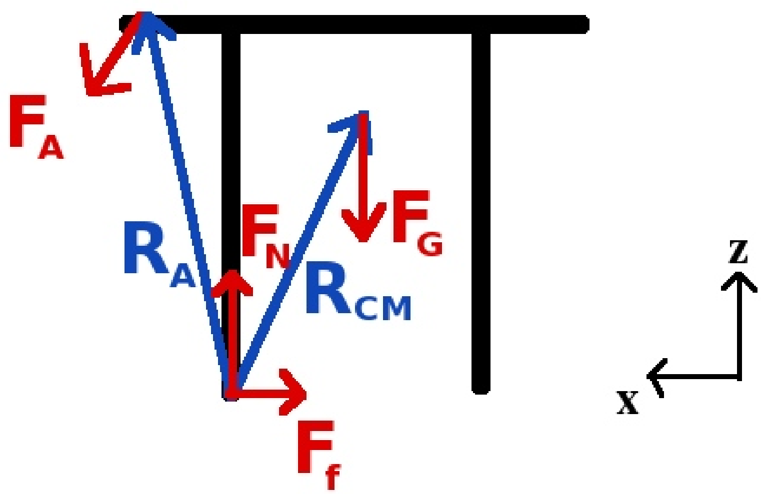

Figure 2 – Schéma des forces. Voir le texte pour les définitions.

$\mathbf{F_A}$, nous devons plutôt résoudre l'équation 2. Pour calculer les produits vectoriels de l'équation précédente, je vais utilisé la définition des angles θ et ϕ de la figure 3.

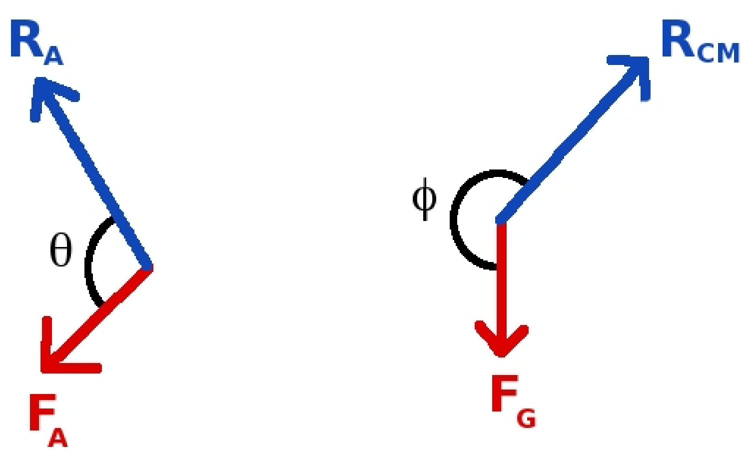

Figure 3 – Définition des angles θ et ϕ. Le sens positif est défini selon le sens anti-horaire.

Ainsi, nous obtenons que

$$\mathbf{N_{tot}} = F_A R_A \sin\theta \, \hat{\mathbf{y}} + F_G R_{CM} \sin\phi \, \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0} \tag{3}$$

où $F_A = |\mathbf{F_A}|$, $R_A = |\mathbf{R_A}|$, $F_G = |\mathbf{F_G}|$, $R_{CM} = |\mathbf{R_{CM}}|$ et $\hat{\mathbf{y}}$ est un vecteur unité dans la direction de l'axe des y. Ceci implique que

$$F_A R_A \sin\theta = -F_G R_{CM} \sin\phi \tag{4}$$

Les inconnus ici sont F_A et θ. Considérant que $\pi < \phi < 2\pi$ (dans le cas qui nous intéresse), nous aurons que $\sin\phi < 0$. Si on définit p comme étant la distance entre les pattes et le centre de la table dans le plan xz (ou la demi-distance entre les pattes), on a que

$$p = -R_{CM} \sin\phi. \tag{5}$$

Ainsi,

$$F_A R_A \sin\theta = pF_G \tag{6}$$

Pour que la grandeur de la force à appliquer (F_A) soit minimale, nous devons alors maximiser $\sin\theta$. La valeur maximale que peut prendre $\sin\theta$ est 1, ce qui correspond à $\theta = \pi/2$ (90 degrés). Dans ce cas, la force est égale à :

$$F_A^{\min} = \frac{mgp}{R_A} \tag{7}$$

où j'ai posé $F_G = mg$, où m est la masse de la table et $g \approx 9,8\mathrm{m/s^2}$ est le champ gravitationnel de la Terre. J'ai ajouté l'exposant «min» à F_A afin d'amplifier le fait qu'il s'agit de la force minimale à appliquer pour obtenir un mouvement. En fait, une force infinitésimalement plus grande causera un balancement de la table.

Si la force était appliquée entièrement vers le bas, nous devrions laisser l'angle dans l'équation. Pour un angle θ quelconque entre la direction de la force et la position du point d'appui R_A, nous aurions alors :

$$F_A = \frac{mgp}{R_A \sin\theta} \tag{8}$$

La force F_A est nécessairement plus grande ou égale à celle dans le cas particulier où nous avons déterminé $F_A^{\min}$ (équation (7)) car $\sin\theta \le 1$.

Il est intéressant de constater ici que si on faisait les mêmes calculs avec la table qui a déjà commencé à basculer, donc avec un angle ϕ plus petit, la force nécessaire pour la maintenir diminuera en fonction de sa hauteur. Donc plus la table est haute, plus il est facile de continuer de la faire basculer.

Soulever la table

Nous pouvons répéter les mêmes opérations pour le cas où M. Rainville tenterait plutôt de soulever la table à son autre extrémité, pour qu'elle bascule de la même façon. Nous définissons d'abord les quantités suivantes :
$\mathbf{F_S}$: la force appliquée pour soulever la table
$\mathbf{R_S}$: le vecteur indiquant l'endroit où la force est appliquée
θ_S : l'angle entre $\mathbf{F_S}$ et $\mathbf{R_S}$, défini de la même façon que θ à la figure 3

La résolution de ce problème sera identique au cas précédent puisque nous la solution proposée était générale. Ainsi, nous aurons

$$F_S = \frac{mgp}{R_S \sin\theta_S} \tag{9}$$

avec bien sûr $F_S = |\mathbf{F_S}|$ et $R_S = \mathbf{R_S}$. Puisque F_S doit être positif par définition, il faut que $0 < \theta_S < \pi$, comme dans le cas précédent. La direction optimale pour minimiser la force sera donc lorsque $\theta = \pi/2$. Dans ce cas, la force est minimale et est donnée par :

$$F_S^{\min} = \frac{mgp}{R_S \sin\theta_S} \tag{10}$$

Cas # 1 : soulever la table vs appliquer une force sur sa surface

Nous pouvons ainsi évaluer le rapport entre la force appliquée sur la table bascule en appliquant une force à sa surface et en appliquant une force pour la soulever à son autre extrémité. Considérant qu'on force dans la direction optimale, ce rapport sera donné par :

$$\frac{F_A^{min}}{F_S^{min}} = \frac{R_S}{R_A} \tag{11}$$

Il est intéressant de voir que cette quantité ne dépend que de R_S et R_A. Pour évaluer ces quantités, nous avons mesuré les dimensions relatives de la table, en unité arbitraire (en fait les unités sont des pixels). Nous pouvons utiliser des unités arbitraire lorsque l'on calcule des angles ou le rapport de dimensions. Les rapports et les angles ne dépendent pas des unités de mesures.

À partir d'une image prise dans Rencontres paranormales, celle présentée à la figure 4, j'ai calculé les quantités suivantes :

– Hauteur de la table h= 394 unités
– Rayon de la surface de la table r=281 unités
– Demi distance entre les pattes p=168 unités
– Distance entre le point d'application de la force et le centre de la table a= 253 unités

Puisque M. Mainville a toujours ses mains très près du bord de la table, j'ai fixé le point d'appui à une certaine distance du bord de la table. J'ai fixé cette distance selon la largeur de la phalange du pouce de la personne qui vérifie la table. Ceci est généreux, car M. Mainville peut très bien appuyer sur la partie de sa main qui est tout près de son poignet, tout près du bord de la table.

Les mesures prises sont approximatives. Cependant, même une petite erreur sur les mesures n'entraine pas un changement significatif des résultats et des ordres de grandeur.

Ainsi, nous pouvons calculer R_S et R_A,

$$R_S = \sqrt{(p+r)^2 + h^2} \approx 597 \text{ unités}$$
$$R_A = \sqrt{a^2 + h^2} \approx 468 \text{ unités}$$

Ainsi, dans le cas qui nous intéresse, le rapport des forces est

$$\frac{F_A^{min}}{F_S^{min}} = 1.28 \tag{12}$$

La force à appliquer pour basculer la table en appuyant ses mains sur la table est alors

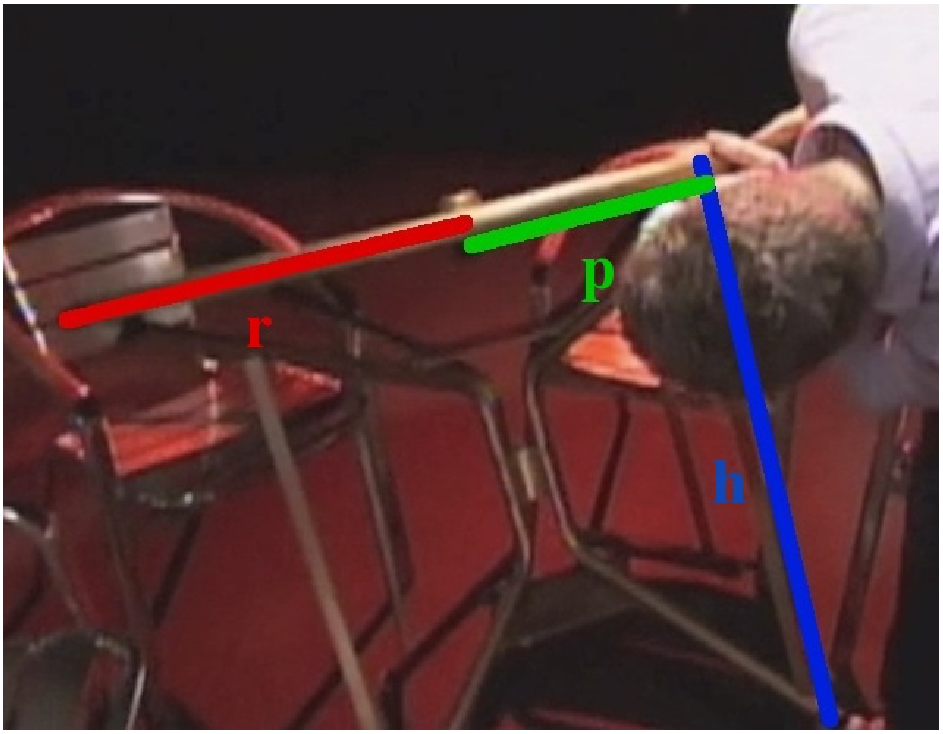

FIGURE 4 – Détermination des dimensions de la table. Bien qu'il y a un effet de perspective, le plan utilisé correspond à celui permettant des mesures crédibles et directes. Bien qu'il puisse y avoir une légère erreur sur les chiffres, les ordres de grandeur ne seront pas affectés.

1.28 fois plus grande que celle nécessaire pour la faire basculer en la soulevant vers le haut. S'il est très facile de la soulever, il ne devrait pas être difficile de la faire basculer, sauf si les mains ne collent pas bien sur la table.

Cas # 2 : force vers le sol

Maintenant considérons le cas où une personne se place au niveau des pattes et applique une force entièrement dirigée vers le sol. L'axe de pivot sera alors à une distance qui correspond à la distance entre la patte et le centre de la table (au niveau du sol).

Nous pouvons recalculer le rapport pour comparer les forces. Dans ce cas-ci, nous aurons que $\theta \neq \pi/2$. Nous aurons plutôt que (en radiant) :

$$\theta = \arctan\frac{a}{h} = \arctan\frac{253}{394} \approx 0.57 \tag{13}$$

Le rapport en fonction de l'ange θ, en écrivant la force appliquée au point d'appui en fonction de l'angle sous la forme $F_A(\theta)$, sera

$$\frac{F_A(\theta)}{F_S^{min}} = \frac{mgp}{R_A \sin\theta} \times \frac{R_S}{mgp} = \frac{R_S}{R_A \sin\theta} \tag{14}$$

En utilisant la valeur de $\theta = 0.57$, nous avons alors que :

$$\frac{F_A(\theta = 0.57)}{F_S^{min}} \approx 2.36 \tag{15}$$

Ainsi, si on applique une force dans la mauvaise direction à partir du même point d'appui, on doit appliquer une force presque 2.4 fois plus grande que celle nécessaire pour la soulever. Si on s'approche d'une patte, ou si on s'approche du centre, l'angle θ diminuera rapidement, ce qui fait que ce rapport augmente très rapidement, devenant infini lorsqu'on se place exactement au-dessus d'une patte. Ceci est intuitif : on ne fera jamais basculer une patte en appuyant vers le sol au-dessus du contact des pattes avec le sol.

Compartivement à la force à appliquer lorsque celle-ci est orientée dans la direction optimale, ceci correspond à un facteur de presque 2.

En appliquant une force principalement vers le bas, Mme Lacroix peut empêcher la table de basculer. En effet, pour que la table bascule, les mains doivent suivre le mouvement de basculement, sinon la table reste à sa position. Ainsi, Mme Lacroix, sans le vouloir, forçait possiblement contre le basculement de la table, en voulant forcer uniquement vers le bas et en ne laissant pas ses mains suivre le mouvement de basculement.

Cas # 3 : Les mains sur la table

Cette partie s'intéressera aux ordres de grandeurs. Donc les calculs seront moins précis, mais auront quand même une grande signification. En effet, tel que nous le verrons, même en ajoutant une marge d'erreur à nos calculs, le poids des mains sur la table n'empêcheront pas le basculement de la table, à moins qu'elles soient très lourdes comparativement à la table.

Si on ajoute des mains sur la table dans l'équation, il faut ajouter la force qu'elles exercent sur la table. On peut répéter les mêmes calculs que ceux précédents en ajoutant le poids des mains $\mathbf{F_{b_n}}$ situés aux positions $\mathbf{R_{b_n}}$, où n réfèrent aux différentes mains. Si les gens ne font que déposer leurs mains, cette force sera entièrement vers le sol puisqu'il s'agit de la force gravitationnelle sur les mains.

Puisque $\mathbf{F_{b_n}}$ est entièrement selon l'axe des z, seule la partie selon l'axe des x de $\mathbf{R_{b_n}}$ va contribuer au couple. Si la contribution dans la direction de l'axe des x est x_n pour la position n, nous pouvons simplement ajouter la quantité suivante $m_b g$ au poids de la table mg dans les calculs :

$$m_b g = \frac{1}{p} \sum_n x_n m_{b_n} g \tag{16}$$

où $m_{b_n} g$ représente le poids ajouté par la main n.

Ainsi, les mains qui sont près de l'axe de basculement ne changent pas vraiment la difficulté de basculer la table. Les mains près du centre de la table contribue selon leur poids réel. Les mains au bout de la table contribuent d'un facteur d'environ 2 au poids de la table.

En considérant 5 personnes accompagnant le médium autour de la table, réparties de façon relativement uniforme, il n'y aura que 3 paires de mains qui contribueront principalement au couple. Pour les inclure dans les calculs précédents de façon la plus simple possible, leurs contributions correspondra à ajouter approximativement l'équivalent de 4 paires de mains au poids total de la table selon ce que l'on vient de voir plus haut. Ceci est un ordre de grandeur et on peut alors faire les calculs plus simplement. Même considérant une erreur de 50% (ce qui est beaucoup), nous aurions 6 paires de main à soulever avec un principe de levier, ce qui n'est pas difficile à faire.

En fait, quand on parle du poids des mains, c'est la contribution des mains plus une partie des bras. Le reste du bras est supporté par l'épaule, donc ne contribue pas au poids ajouté sur la table.

Il est difficile de croire que soulever la table avec l'ajout de la présence des 4 paires de main au poids de la table ferait en sorte d'empêcher la table de basculer. Lever 4 paires de mains n'exige pas d'utiliser une grande force. On peut même ajouter plusieurs mains sans que ça affecte la difficulté de faire basculer la table.

Cas # 4 : soulever complètement la table vs appliquer une force sur sa surface

La force minimale nécessaire pour soulever complètement la table, en faisant en sorte que toutes les pattes ne touchent plus le sol, sera de mg. Ainsi le rapport entre la force nécessaire pour la faire basculer et la force nécessaire pour la soulever complètement est donnée par :

$$\frac{F_A^{min}}{mg} = \frac{p}{R_A} \approx 0.36 \tag{17}$$

Il est ainsi presque 3 fois plus facile de faire basculer la table comme on le voit dans Rencontres paranormales que de soulever complètement la table. Ceci est ce qu'on appelle l'effet de levier. Si on ajoutait l'équivalent de 6 paires de mains au centre de masse, ceci correspondrait à ne soulever que 2 paires de mains sans effet de levier.

Conclusion

Les différents résultats obtenus montrent qu'il n'est pas du tout difficile de faire basculer la table de l'émission Rencontres paranormales. Les participants n'ont jamais eu de problème à la soulever, ce qui veut dire qu'elle peut être basculée sans problème.

Nous n'avons pas considéré la force de friction nécessaire pour que les mains restent collées à la table. Cependant, considérant que la force nécessaire pour basculer la table n'est pas très grande, nous pouvons en déduire qu'il sera facile de faire en sorte que les mains collent. Ce qui aide aussi à faire coller les mains, c'est le fait qu'une partie de la force à appliquer pour basculer la table est vers le bas, ce qui contribue à faire coller les mains sur la table sans ajouter une force supplémentaire.

Document rédigé par Dany Plouffe